

Les premiers zéros de la fonction  $\zeta$  de RIEMANN ont une partie réelle égale à  $1/2$  : vérification numérique avec la bibliothèque Arb disponible sur SageMath

---

Réalisé par Alexandre GOYER  
Encadré par Marc MEZZAROBBA

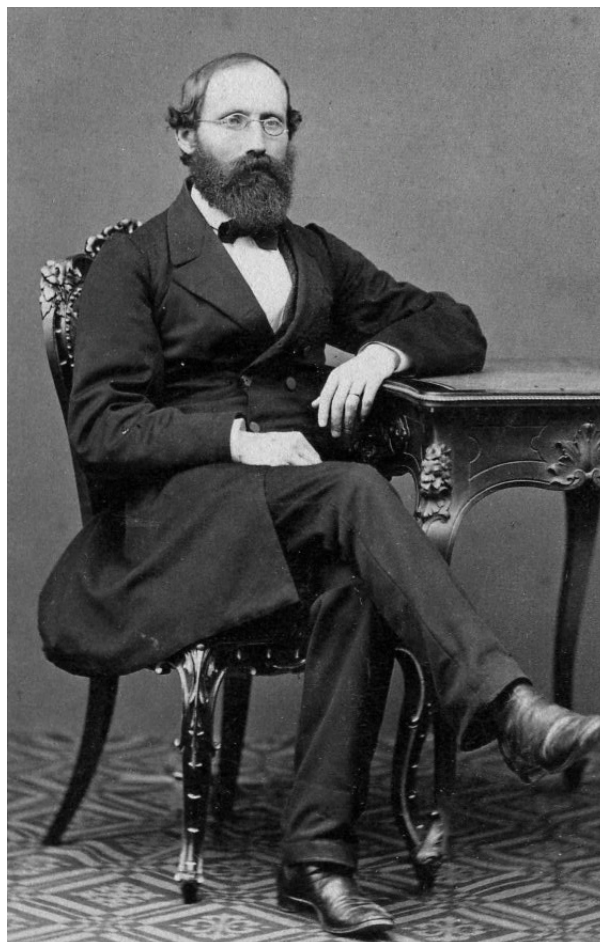
**mots-clef** calcul numérique rigoureux, arithmétique d'intervalles, hypothèse de RIEMANN, SageMath

En 1859, le mathématicien allemand Bernhard RIEMANN formule une conjecture qui est toujours non-résolue et considérée comme l'un des problèmes mathématiques majeurs du XXI<sup>ème</sup> siècle. Nous commencerons par rappeler l'objet principal de cette conjecture, une certaine fonction méromorphe, appelée fonction  $\zeta$  de RIEMANN, puis nous verrons comment le calcul *approché* de certaines valeurs de cette fonction et de sa dérivée permet d'affirmer que les premiers zéros de cette fonction, *i.e.* les zéros dans la bande critique  $\{0 \leq \Re \leq 1\}$  les plus proches de la droite réelle, ont une partie réelle *exactement* égale à  $\frac{1}{2}$ . La conjecture de Riemann avance que c'est le cas pour tous les zéros de la bande critique. Pour faire les calculs, nous utiliserons le logiciel libre SageMath et en particulier la bibliothèque Arb, spécialisée dans l'arithmétique d'intervalles.

# Table des matières

A	La fonction $\zeta$ de RIEMANN . . . . .	3
B	Évaluations numériques . . . . .	6
C	Symétrie de la fonction $\chi$ . . . . .	10
D	Les trois premiers zéros sont sur la ligne critique . . . . .	13
D.1	Minoration du nombre de zéros sur la droite . . . . .	14
D.2	Nombre de zéros dans la bande . . . . .	15
<b>Bibliographie</b>		<b>18</b>

Bernhard RIEMANN, 1826-1866



## A La fonction $\zeta$ de RIEMANN

Dans le demi-plan  $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ , la fonction  $\zeta$  de RIEMANN est définie comme la série, normalement convergente sur tout compact, suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1, \quad \zeta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Plusieurs méthodes existent pour montrer que l'on peut prolonger le domaine de définition de cette fonction à tout le plan complexe privé de 1. Celle choisie ici a le mérite de donner en même temps un moyen efficace pour calculer des valeurs approchées de  $\zeta$  (voir section suivante).

Cette méthode repose sur la formule d'EULER et MACLAURIN, formule rappelée ci-dessous et qui fait intervenir la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des polynômes de BERNOULLI définie, par exemple, comme l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0(X) = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0, \end{cases}$$

ainsi que la suite  $(b_n)_{n \geq \mathbb{N}}$  des nombres de BERNOULLI, définie par  $b_n = B_n(0)$ . Une démonstration de l'existence et de l'unicité de cette suite de polynômes est donnée par le caractère bijectif de l'opérateur linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & (P(X+1) - P(X), \int_0^1 P(t) dt) \end{cases}$$

voir le lemme 1.1 dans [Kou16] page 2 pour une démonstration. En remarquant que  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi l'unique suite de polynômes vérifiant, pour tout  $z$  dans un voisinage ouvert complexe de 0 et pour tout  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

(voir le Sujet d'étude 2 dans [Gou08], page 299), on en déduit quelques propriétés intéressantes, comme les suivantes, pour  $n \geq 1$  :

$$B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X) \quad \text{et} \quad B'_n(X) = nB_{n-1}(X),$$

utiles dans la démonstration de la formule d'EULER et MACLAURIN. Enfin, on note  $\tilde{B}_n$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , 1-périodique, qui coïncide avec  $B_n$  sur  $[0, 1[$ .

### Formule d'EULER et MACLAURIN

Soient  $J, K, U$  trois entiers strictement positifs avec  $K < U$ .  
Soit  $f : [K, U] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^{2J}$ . Alors :

$$\sum_{k=K}^U f(k) = \frac{1}{2} (f(K) + f(U)) + I + S + R,$$

où l'on a noté :

$$I = \int_K^U f(t) dt, \quad S = \sum_{j=1}^J \frac{b_{2j}}{(2j)!} \left( f^{(2j-1)}(U) - f^{(2j-1)}(K) \right)$$

$$\text{et } R = -\frac{1}{(2J)!} \int_K^U \tilde{B}_{2J}(t) f^{(2J)}(t) dt.$$

Cela se démontre par récurrence sur  $J$  en intégrant par parties. On trouve une rédaction dans le Sujet d'étude 3 dans [Gou08], page 302. Revenons maintenant à la fonction  $\zeta$  de RIEMANN. Nous adopterons la notation suivante, pour  $s \in \mathbb{C}$  et  $h \in \mathbb{N}$  :

$$(s)_h \stackrel{\text{déf}}{=} s(s+1) \cdots (s+h-1) \text{ si } h > 0 \text{ et } (s)_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 1.$$

### Proposition 1

Soient  $J, K \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 1$  :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k^s} + \frac{1}{2K^s} + \frac{1}{(s-1)K^{s-1}} + \sum_{j=1}^J \frac{b_{2j}}{(2j)!} \frac{(s)_{2j-1}}{K^{s+2j-1}} + R(s, J, K),$$

$$\text{avec } R(s, J, K) = -\frac{(s)_{2J}}{(2J)!} \int_K^{+\infty} \tilde{B}_{2J}(t) \frac{1}{t^{s+2J}} dt.$$

**Démonstration** L'idée est d'appliquer la formule d'EULER et MACLAURIN au reste tronqué ( $U > K \geq 1$  entiers)

$$\sum_{k=K}^U \frac{1}{k^s}$$

de la série définissant  $\zeta(s)$ , puis de faire tendre  $U$  vers l'infini.

Soit  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 1$ . Introduisons la fonction

$$f(t) = \frac{1}{t^s} = \exp(-s \log(t))$$

définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

Pour tout  $h \in \mathbb{N}$ , on a, quelque soit  $t > 0$  :

$$f^{(h)}(t) = (-1)^h \frac{(s)_h}{t^{s+h}}.$$

Soient  $J, K \in \mathbb{N}^*$ . D'après la formule d'EULER et MACLAURIN, on obtient, quel que soit  $U > K$  entier :

$$\sum_{k=K}^U \frac{1}{k^s} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K^s} + \frac{1}{U^s} \right) + I(U) + S(U) + R(U),$$

où l'on a noté :

$$I(U) = \int_K^U \frac{1}{t^s} dt = \frac{-1}{s-1} \left( \frac{1}{U^{s-1}} - \frac{1}{K^{s-1}} \right),$$

$$S(U) = \sum_{j=1}^J \frac{b_{2j}}{(2j)!} \left( \frac{-(s)_{2j-1}}{U^{s+2j-1}} - \frac{-(s)_{2j-1}}{K^{s+2j-1}} \right),$$

$$R(U) = -\frac{(s)_{2J}}{(2J)!} \int_K^U \tilde{B}_{2J}(t) \frac{1}{t^{s+2J}} dt.$$

Or,  $\tilde{B}_{2J}$  est bornée car polynomiale sur  $[0, 1[$  et 1-périodique, donc la fonction mesurable  $t \mapsto \tilde{B}_{2J} \frac{1}{t^{s+2J}}$  est intégrable sur  $[K, +\infty[$  car absolument intégrable. La proposition s'en déduit en faisant tendre  $U$  vers  $+\infty$ . ■

#### Proposition / Définition 2

La fonction  $\zeta$  de RIEMANN admet un unique prolongement méromorphe à tout le plan complexe, admettant un seul pôle en 1, qui est simple et de résidu égal à 1. Nous continuerons de noter  $\zeta$  ce prolongement.

**Démonstration** L'unicité est conséquence immédiate du principe du prolongement analytique. Soit  $J \geq 1$  un entier quelconque. Nous allons établir que la fonction  $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  admet un prolongement holomorphe sur le demi-plan complexe  $\{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1 - 2J\}$ .

Soit  $K \geq 1$  entier. D'après la proposition 2, nous avons, pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 1$  :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k^s} + \frac{1}{2K^s} + \frac{K^{1-s}-1}{s-1} + \sum_{j=1}^J \frac{b_{2j}}{(2j)!} \frac{(s)_{2j-1}}{K^{s+2j-1}} + \psi(s)$$

où l'on a noté :  $\psi : s \mapsto -\frac{(s)_{2J}}{(2J)!} \int_K^{+\infty} \tilde{B}_{2J}(t) \frac{1}{t^{s+2J}} dt$ .

La fonction  $s \mapsto \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k^s} + \frac{1}{2K^s}$  est holomorphe sur tout  $\mathbb{C}$ . La fonction  $s \mapsto \frac{K^{1-s}-1}{s-1} = \frac{1}{s-1} (\exp((1-s) \ln(K)) - 1)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  et admet une singularité illusoire en 1 (tend vers  $-\ln(K)$  quand  $s \rightarrow 1$ ). La fonction  $s \mapsto \sum_{j=1}^J \frac{b_{2j}}{(2j)!} \frac{(s)_{2j-1}}{K^{s+2j-1}}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Il reste donc à montrer que la fonction  $\psi$  est holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1 - 2J\}$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Notons  $D_\epsilon \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1 - 2J + \epsilon\}$  et montrons que  $\psi$  est holomorphe sur  $D_\epsilon$ . Soit  $f : D_\epsilon \times [K, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction d\u00e9finie par  $f(s, t) = \tilde{B}_{2J}(t) \frac{1}{t^{s+2J}}$ . \u00c0  $t \in [K, +\infty[$  fix\u00e9,  $s \mapsto f(s, t)$  est holomorphe sur  $D_\epsilon$  et \u00e0  $z \in D_\epsilon$  fix\u00e9,  $t \mapsto f(s, t)$  est mesurable car continue par morceaux sur  $[K, +\infty[$ . De plus, pour tout  $(s, t) \in D_\epsilon \times [K, +\infty[$  :

$$|f(s, t)| = \frac{|\tilde{B}_{2J}(t)|}{t^{\Re(s)+2J}} \leq \frac{\|\tilde{B}_{2J}\|_\infty}{t^{1+\epsilon}}.$$

Or,  $t \mapsto \frac{1}{t^{1+\epsilon}}$  est int\u00e9grable sur  $[K, +\infty[$  : on en d\u00e9duit, en vertu du th\u00e9or\u00e8me d'holomorphie sous le signe int\u00e9grale, que la fonction  $s \mapsto \int_{[K, +\infty[} f(s, t) dt$  est holomorphe sur  $D_\epsilon$ , et donc  $\psi$  est aussi holomorphe sur  $D_\epsilon$ .  $\blacksquare$

**Remarque 3** La preuve pr\u00e9c\u00e9dente montre que la proposition 1 reste vraie pour tout  $s \neq 1$  de partie r\u00e9elle strictement sup\u00e9rieure \u00e0  $1 - 2J$ .

**Remarque 4** On en d\u00e9duit que, pour tout  $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ .

## B \u00c9valuations num\u00e9riques

Dans notre \u00e9tude, nous nous int\u00e9ressons seulement aux valeurs de  $\zeta$  dans un voisinage de la bande critique  $\{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$ , ce qui justifie l'hypoth\u00e8se faite sur la partie r\u00e9elle de  $s$  dans la proposition suivante. Comme il appara\u00eetra dans la preuve, on doit prendre  $|s| \leq 2\pi K$  pour que la formule donn\u00e9e dans la proposition 1 ait un reste qui tend vers 0. Nous r\u00e9sumons ici un jeu d'hypoth\u00e8ses qui permet d'avoir une majoration agr\u00e9able du reste : on obtient  $p$  chiffres de pr\u00e9cision en  $O(p)$  op\u00e9rations dans  $\mathbb{C}$ . En pratique, le temps

de calcul ne sera pas linéaire en la précision car le coût d'une opération augmente lorsque l'on travaille avec des nombres plus précis.

**Proposition 5**

Soient  $J, K \in \mathbb{N}$  deux entiers tels que  $J \geq 5$  et  $K = 2J$ . Pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $s \neq 1$ ,  $\Re(s) > -1$  et  $|s| \leq K$ , on a :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k^s} + \frac{1}{2K^s} + \frac{1}{(s-1)K^{s-1}} + \sum_{j=1}^J \frac{b_{2j}}{(2j)!} \frac{(s)_{2j-1}}{K^{s+2j-1}} + R(s, J, K),$$

où  $|R(s, J, K)| \leq 2^{-K}$ .

**Démonstration** Soient  $J, K$  et  $s$  comme dans l'énoncé. D'après la proposition 1 et la remarque 3, l'expression de  $R(s, J, K)$  est donnée par

$$R(s, J, K) = -\frac{(s)_{2J}}{(2J)!} \int_K^{+\infty} \tilde{B}_{2J}(t) \frac{1}{t^{s+2J}} dt.$$

Et d'après les corollaires 2.7 et 3.2 de [Kou16] pages 8 et 10, nous avons :

$$\|\tilde{B}_{2J}\|_{\infty} = |b_{2J}| \quad \text{et} \quad b_{2J} = (-1)^{J+1} \frac{2(2J)!}{(2\pi)^{2J}} \zeta(2J).$$

Or,  $\zeta : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \zeta(x)$  est décroissante, positive et  $\zeta(2) \leq 2$ , donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a la majoration :

$$|\tilde{B}_{2J}(t)| \leq \frac{4(2J)!}{(2\pi)^{2J}}.$$

donc on obtient :

$$|R(s, J, K)| \leq 4 \frac{|(s)_{2J}|}{(2\pi)^{2J}} \int_K^{+\infty} \frac{1}{t^{\Re(s)+2J}} dt,$$

avec 
$$\int_K^{+\infty} \frac{1}{t^{\Re(s)+2J}} dt = \frac{1}{(\Re(s) + 2J - 1)K^{\Re(s)+2J-1}} \leq \frac{K^2}{(2J - 2)K^{2J}},$$

car  $\Re(s) > -1$  et  $J \geq 5$ . Ainsi, il vient :

$$|R(s, J, K)| \leq \frac{2K^2}{J-1} \frac{|(s)_{2J}|}{(2\pi K)^{2J}} \leq \frac{2K^2}{J-1} \left( \frac{|s| + 2J - 1}{2\pi K} \right)^{2J}.$$

Or  $K = 2J$  donc  $2(J-1) = K-2$  et on obtient :

$$|R(s, J, K)| \leq \frac{4K^2}{K-2} \left( \frac{|s| + K}{2\pi K} \right)^K.$$

Finalement, si  $|s| \leq K$ , on en déduit que :

$$2^K |R(s, J, K)| \leq \frac{4K^2}{K-2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^K.$$

Notons  $u_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{4n^2}{n-2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n$ . Pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{n^2+1}{n^2} \left(\frac{2}{\pi}\right) \leq 1 \quad \text{car } n \geq 2 \geq \sqrt{2} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi-2}}.$$

Donc  $(u_n)_{n \geq 2}$  décroît et  $u_{10} = 50 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{10} \leq 1$ , donc  $u_K \leq 1$ , ce qu'il fallait. ■

Pour évaluer les valeurs de la dérivée  $\zeta'$ , l'idée est de se servir du calcul précédent de  $\zeta$ . On va chercher à majorer l'écart entre la dérivée et le taux d'accroissement. D'après l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 2, on a, pour  $s \in \mathbb{C}$  et  $h > 0$  tels que  $1 \notin [s, s+h]$  :

$$\left| \frac{\zeta(s+h) - \zeta(s)}{h} - \zeta'(s) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{[s, s+h]} |\zeta''|.$$

Et le module de la dérivée seconde est contrôlé par l'inégalité de CAUCHY à l'ordre 2 : pour tout  $r > 0$ , et tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $|s-1| > r$ , on a :

$$\zeta''(s) \leq \frac{2}{r^2} \sup_{\mathcal{B}(s,r)} |\zeta|.$$

#### Lemme 6

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z \neq 1$  et  $\Re(z) > -\frac{1}{2}$ , on a :

$$|\zeta(z)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{|z-1|} + \frac{|z|}{12} + \frac{|z||z+1|}{6}.$$

**Démonstration** Soit  $z$  comme dans l'énoncé. D'après la proposition 2 (pour  $J = K = 1$ ) et la remarque 4, on a :

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} + \frac{z}{12} - \frac{z(z+1)}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_2(t)}{t^{z+2}} dt.$$

On obtient le lemme par inégalité triangulaire, en utilisant que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt = \left[ \frac{-2}{t^{\frac{1}{2}}} \right]_1^{+\infty} = 2,$$

et que pour tout  $t \in [1, +\infty[$ ,  $|\tilde{B}_2(t)| \leq b_2 = \frac{1}{6}$ . ■



Nous proposons maintenant une manière de calculer  $\zeta'(s)$  (pour  $s$  dans un voisinage de la bande critique, raisonnablement éloigné de 1) avec une précision arbitraire.

**Proposition 7**

Soient  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > -\frac{1}{4}$ , et  $|s - 1| \geq \frac{1}{4}$ , et  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :

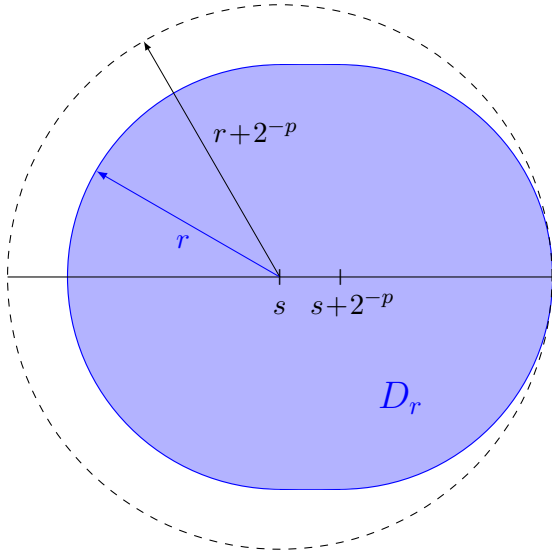
$$11 + \frac{1}{2}(1 + |s|)^2 \leq 2^k.$$

Alors, pour tout  $p \geq 8$ , on a :

$$\left| \frac{\zeta(s + 2^{-p}) - \zeta(s)}{2^{-p}} - \zeta'(s) \right| \leq 2^{8+k-p}.$$

**Démonstration** Soient  $s, k$  et  $p$  comme dans l'énoncé. Pour  $r > 0$ , notons  $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists t \in [0, 2^{-p}], z \in \mathcal{B}(s + t, r)\}$ . Alors, d'après les inégalités de TAYLOR-LAGRANGE et de CAUCHY rappelées en début de section :

$$\left| \frac{\zeta(s + 2^{-p}) - \zeta(s)}{2^{-p}} - \zeta'(s) \right| \leq \frac{2^{-p}}{r^2} \sup_{z \in D_r} |\zeta(z)|.$$



Posons  $r = \frac{1}{22}$  de telle sorte que  $\frac{1}{r^2} \leq 2^9$  et  $r + 2^{-p} \leq \frac{1}{20}$ . Il suffit alors de montrer que pour ce choix de  $r$ , on a, pour tout  $z \in D_r$ , la majoration

$$|\zeta(z)| \leq \frac{1}{2} \left( 11 + \frac{1}{2}(1 + |s|)^2 \right).$$

Soit  $z \in D_r$ . Comme  $D_r \subset \mathcal{B}(s, r + 2^{-p})$ , on a, par inégalité triangulaire :

$$|z - 1| \geq |s - 1| - |s - z| \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}.$$

D'après le lemme 6, on a alors :

$$\zeta(z) \leq \frac{1}{2} + 5 + \frac{|z|}{12} + \frac{|z||z + 1|}{6} = \frac{1}{2} \left( 11 + \frac{|z|}{6} + \frac{|z||z + 1|}{3} \right).$$

La proposition suit en remarquant que :

$$\frac{|z|}{6} + \frac{|z||z + 1|}{3} = \frac{3|z| + 2|z|^2}{6} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{19}{20} + |z| \right)^2 \leq \frac{1}{2} (1 + |s|)^2. \quad \blacksquare$$

## C Symétrie de la fonction $\chi$

Cette section a pour but de présenter une fonction auxiliaire, la fonction  $\chi$ , et de montrer que cette fonction est symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$ , ce qui fournira une équation fonctionnelle pour la fonction  $\zeta$ . Commençons par un résultat intermédiaire, conséquence de la formule sommatoire de POISSON dont on trouve une démonstration dans [Col11] (Théorème IV.3.18 page 345).

Lemme 8

Notons  $\omega$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\omega(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

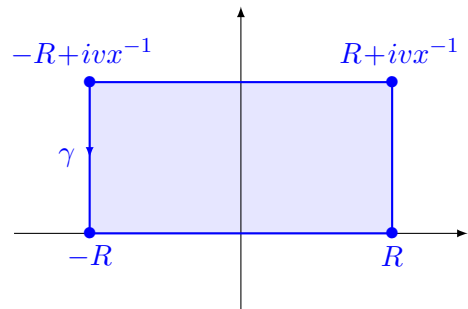
Pour tout  $x > 0$ , on a  $\omega(x^{-1}) = x^{\frac{1}{2}}\omega(x) + \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}} - 1)$ .

**Démonstration** Soit  $x > 0$ . Notons  $f$  la fonction intégrable  $u \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\pi u^2 x}$ , et calculons sa transformée de FOURIER.

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2 x} e^{-2i\pi uv} du = e^{-\pi v^2 x^{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(u+ivx^{-1})^2} du.$$

Or, d'après le théorème intégral de CAUCHY appliqué à la fonction holomorphe  $z \mapsto e^{-\pi xz^2}$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{C}$  et au contour  $\gamma$  défini ci-contre pour  $R \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(u+ivx^{-1})^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi xu^2} du.$$



Donc finalement, d'après le calcul bien connu de l'intégrale de GAUSS, on a

$$\hat{f}(v) = x^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2 x^{-1}},$$

puis, comme  $f$  est dans l'espace de SCHWARTZ, on peut lui appliquer la formule de POISSON

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n),$$

ce qui donne

$$1 + 2\omega(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi n^2 x^{-1}} = x^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\omega(x^{-1})),$$

d'où  $\omega(x^{-1}) = x^{\frac{1}{2}}\omega(x) + \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}} - 1)$ . ■

Nous aurons besoin de la fonction  $\Gamma$  d'EULER, qui fournit un prolongement holomorphe de la fonction factorielle  $n \in \mathbb{N} \mapsto n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ . Rappelons sa définition. Pour  $s$  de partie réelle strictement positive, on note :

$$\Gamma(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

**Proposition / Définition 9**

La fonction  $\chi$  définie pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 0$  et  $s \neq 1$  par

$$\chi(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s),$$

est symétrique par rapport au point  $\frac{1}{2}$ . Plus précisément, elle admet un prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$  avec deux pôles simples en 0 et en 1, tel que, pour tout  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , on ait l'équation fonctionnelle

$$\chi(s) = \chi(1-s).$$

En particulier, pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration** Il suffit d'établir l'équation fonctionnelle dans la bande  $\mathcal{B} = \{0 < \Re(s) < 1\}$ . En effet, si on a la symétrie dans  $\mathcal{B}$ , on prolonge  $\chi$  en posant  $\overline{\chi(s)} := \chi(1-s)$  si  $\Re(s) \leq 0$ . La dernière assertion vient du fait que  $\chi(\bar{s}) = \overline{\chi(s)}$  (on le vérifie pour  $\Re(s) > 0$  et on invoque la symétrie) et du fait que  $1-s = \bar{s}$  pour  $s$  de la forme  $\frac{1}{2} + it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

L'idée est d'établir une expression de  $\chi$  qui sera clairement symétrique par rapport au point  $\frac{1}{2}$ . On commencera par l'établir sur  $\{\Re > 1\}$  puis on appliquera le principe du prolongement analytique. Soit donc  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 1$ . En observant que

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{1}{n^s} \right| dt = \left( \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \right)^{\Re(s)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{\Re(s)}{2}-1} dt \quad (\star)$$

est le terme général d'une série convergente, le théorème de FUBINI-LEBESGUE justifie la permutation somme-intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{1}{n^s} dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{\pi n^2}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \\
&\stackrel{t \leftrightarrow \pi n^2 x}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx .
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est absolument convergente d'après l'observation (\*), donc on peut écrire, en faisant le changement  $x \leftrightarrow u^{-1}$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx &= \int_1^{+\infty} \omega(u^{-1}) u^{1-\frac{s}{2}} \frac{du}{u^2} \\
&= \int_1^{+\infty} \left[ x^{\frac{1}{2}} \omega(x) + \frac{1}{2} (x^{\frac{1}{2}} - 1) \right] x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (x^{\frac{1}{2}} - 1) x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \omega(x) x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} .
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\int_1^{+\infty} (x^{\frac{1}{2}} - 1) x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \left[ \frac{x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}}{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} - \frac{x^{-\frac{s}{2}}}{-\frac{s}{2}} \right]_1^{+\infty} = 2 \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) ,$$

et donc finalement, on a montré que si  $\Re(s) > 1$ , on a :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} \omega(x) \left( x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \frac{dx}{x} .$$

Montrons que cette égalité reste valable si on a seulement  $\Re(s) > 0$ . Le membre de droite étant manifestement invariant par changement de  $s$  en  $1-s$ , la proposition sera démontrée. On invoque pour cela le principe du prolongement analytique : il faut justifier que le membre de droite définit bien une fonction holomorphe sur le demi-plan  $\{\Re > 0\}$  privé de 1. La fonction

$$s \longmapsto \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

étant holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , intéressons-nous à l'intégrale.

Soit  $M > 0$ . Notons  $D = \{s \in \mathbb{C}, -M < \Re(s) < M\}$  et montrons que

$$s \longmapsto F(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_1^{+\infty} \omega(x) \left( x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \frac{1}{x} dx$$

définit une fonction holomorphe sur  $D$ . À  $s \in D$  fixé, la fonction

$$x \longmapsto \omega(x) \left( x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \frac{1}{x}$$

est mesurable (car continue) sur  $[1, +\infty[$ . À  $x \in [1, +\infty[$  fixé, la fonction

$$\begin{aligned} s \longmapsto \omega(x) \left( x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \frac{1}{x} \\ = \omega(x) \left( \exp \left( \frac{1-s}{2} \log(x) \right) + \exp \left( \frac{s}{2} \log(x) \right) \right) \frac{1}{x} \end{aligned}$$

est holomorphe sur  $D$  et pour tout  $s \in D$ , on a la majoration uniforme

$$\left| \omega(x) \left( x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \frac{1}{x} \right| \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\pi x})^n \right) \left( x^{\frac{1-\Re(s)}{2}} + x^{\frac{\Re(s)}{2}} \right) \frac{1}{x} \leq \frac{x^{\frac{1+M}{2}} + x^{\frac{M}{2}}}{x(e^{\pi x} - 1)}.$$

Or, la fonction

$$x \longmapsto \frac{x^{\frac{1+M}{2}} + x^{\frac{M}{2}}}{x(e^{\pi x} - 1)}$$

est intégrable sur  $[1, +\infty[$  donc  $F$  est holomorphe sur  $D$  en vertu du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, et donc sur  $\mathbb{C}$  tout entier étant donné l'arbitraire de  $M$ . ■

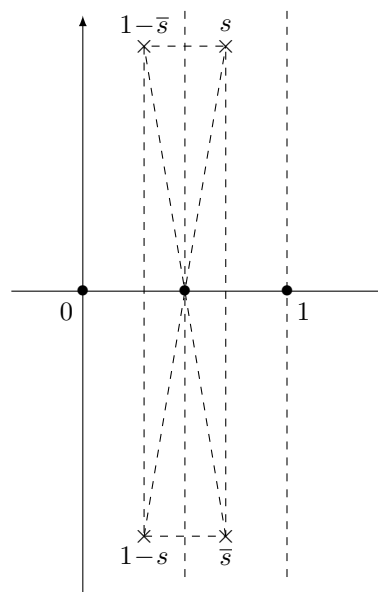
## D Les trois premiers zéros sont sur la ligne critique

Dans cette section, nous expliquons comment la connaissance de certaines valeurs approchées des fonctions précédemment introduites suffit pour affirmer que les premiers zéros de  $\zeta$  dans la bande  $\{0 \leq \Re \leq 1\}$  (*i.e.* les plus proches de l'axe réel) sont en fait sur la droite critique  $\{\Re = \frac{1}{2}\}$ .

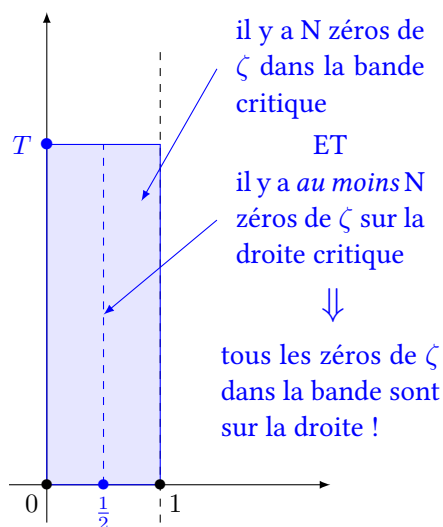
D'après la formule des compléments

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

(voir [Can09] pour une démonstration) la fonction  $\Gamma$  ne s'annule pas dans la bande  $\{0 < \Re < 1\}$ . Donc, sur la droite critique, les zéros de  $\zeta$  coïncident avec ceux de  $\chi$ . L'équation fonctionnelle vue dans la section précédente montre alors que les zéros de  $\zeta$  dans la bande sont symétriques par rapport au point  $\frac{1}{2}$ , et d'après la remarque 4, ils sont aussi symétriques par rapport à la droite réelle donc ils sont symétriques par rapport à la droite  $\{\Re = \frac{1}{2}\}$ .



On se limitera à l'étude des zéros de parties réelles positives. Soit  $T > 0$ . On va voir que la fonction  $\chi$  nous permet de minorer le nombre de zéros de  $\zeta$  sur la droite critique  $\{\Re = \frac{1}{2}\}$  de parties imaginaires comprises entre 0 et  $T$ .



L'évaluation d'une intégrale de contour bien choisie nous donnera, en vertu du théorème des résidus, le nombre de zéros de  $\zeta$  dans la bande critique  $\{0 \leq \Re \leq 1\}$  de parties imaginaires comprises entre 0 et  $T$ . Si on en trouve autant, cela nous assurera que tous les zéros de  $\zeta$  dans la bande critique  $\{0 \leq \Re \leq 1\}$  de parties imaginaires comprises entre 0 et  $T$  sont bel et bien sur la droite critique  $\{\Re = \frac{1}{2}\}$ .

### D.1 Minoration du nombre de zéros sur la droite

Comme annoncé ci-dessus, les fonctions  $\zeta$  et  $\chi$  s'annulent aux mêmes endroits dans la bande  $\{0 < \Re < 1\}$ , on peut donc se contenter de chercher des zéros de  $\rho : t \in \mathbb{R} \mapsto \chi(\frac{1}{2} + it)$  pour trouver des zéros de  $\zeta$  sur la droite critique, ce qui est plus simple car la fonction  $\rho$  est à valeurs réelles. En effet, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $\rho$  étant continue, si on arrive à trouver deux réels  $t_1 < t_2$  tels que  $\rho(t_1)$  et  $\rho(t_2)$  soient de signes opposés, alors  $\rho$  s'annule forcément au moins une fois dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ . Et, pour  $t \in \mathbb{R}$ , il est possible de trouver le signe de  $\rho(t)$  en calculant seulement une valeur approchée : il suffit que l'erreur soit assez petite. Voyons en pratique comment, avec l'aide de SageMath et de la bibliothèque Arb, on montre que la fonction  $\zeta$  de RIEMANN admet au moins trois zéros sur la droite critique de parties imaginaires comprises entre 0 et 30.

On utilise ici les fonctions zeta et gamma fournies par SageMath (on peut aussi coder  $\zeta$  suivant la proposition 5, section B). Commençons par définir la fonction  $\rho$ .

```
C = ComplexBallField()
def rho (t) :
    s = 1/2+t*I
    result = gamma(s/2)*(pi**(-s/2))*zeta(s)
    return C(result).real()
```

Par exemple, la commande `rho(1)` renvoie la boule

$$[-0.77721188747357 \pm 5.33e-15],$$

boule incluse dans  $\mathbb{R}_+^*$  : on en déduit que la valeur exacte de  $\rho$  en 1 est strictement négative.

Le tableau suivant montre que la fonction  $\rho$  s'annule au moins trois fois dans l'intervalle  $[0, 30]$  : une fois entre 14 et 15, une fois entre 20 et 22 et une fois entre 24 et 26.

Commandes	Ce que renvoie SageMath	Signe
<code>rho(14)</code>	<code>[-2.0514083488943e-6 +/- 5.08e-20]</code>	-
<code>rho(15)</code>	<code>[6.2659086243867e-6 +/- 9.27e-20]</code>	+
<code>rho(20)</code>	<code>[1.8316266211423e-7 +/- 5.38e-21]</code>	+
<code>rho(22)</code>	<code>[-3.1869137014995e-8 +/- 1.16e-22]</code>	-
<code>rho(24)</code>	<code>[-7.3465715519632e-9 +/- 6.43e-23]</code>	-
<code>rho(26)</code>	<code>[1.9146130302773e-9 +/- 4.80e-23]</code>	+

On en déduit que la fonction  $\zeta$  admet au moins trois zéros de partie réelle exactement égale à  $\frac{1}{2}$  et de parties imaginaires comprises entre 0 et 30.

## D.2 Nombre de zéros dans la bande

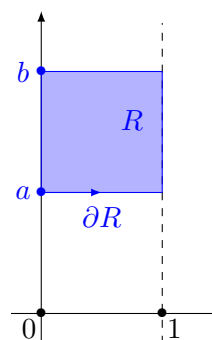
Dans cette partie, on vérifie que, dans la bande critique  $\{0 \leq \Re \leq 1\}$ , la fonction  $\zeta$  n'a que trois zéros de parties imaginaires comprises entre 0 et 30. Pour cela, on invoque le théorème des résidus : la fonction  $\zeta$  étant holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , le nombre de zéros de  $\zeta$  dans un rectangle du type

$$R = \{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(s) \leq 1 \text{ et } a \leq \Im(s) \leq b\},$$

où  $0 < a < b$ , est donné par la valeur de l'intégrale

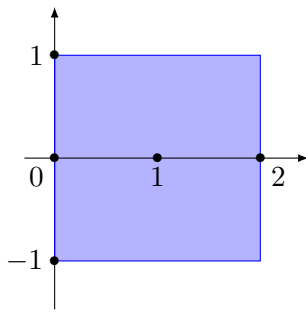
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz,$$

où  $\partial R$  désigne le bord du rectangle, parcouru une fois dans le sens direct, dès lors que  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $\partial R$ .



Le but est donc de trouver une valeur approchée  $[A \pm e]$  de cette intégrale, assez précise pour que l'intersection dans cette boule avec  $\mathbb{Z}$  soit réduite à un point. En pratique, nous n'aurons pas besoin de nous soucier du fait que le bord du rectangle passe ou non sur un point d'annulation de  $\zeta$ . En effet, si par malchance tel est le cas, alors le calcul de l'intégrale ne pourra aboutir. Ainsi, si la fonction `integral` de SageMath renvoie une vraie boule (*i.e.* une boule

différente de  $\text{nan} + I * \text{nan}$ ), alors  $\zeta$  ne s'annule pas sur le bord du rectangle.



Commençons par nous débarrasser de la singularité en 1 en observant que la fonction  $\zeta$  n'a pas de zéro dans la bande critique de partie imaginaire comprise entre -1 et 1. On choisit pour cela un rectangle un peu différent, de façon à enlancer cette portion de la bande tout en évitant que le bord ne passe par 1, par exemple

$$\{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(s) \leq 2 \text{ et } -1 \leq \Im(s) \leq 1\} .$$

Vérifions cela avec SageMath. On a besoin d'implémenter l'intégrande  $\frac{\zeta'}{\zeta}$ . Le code proposé ici utilise la fonction `zeta` de SageMath, et les résultats établis dans la section B, notamment l'entier  $k$  tel que :

$$11 + \frac{1}{2}(1 + |s|)^2 \leq 2^k .$$

```

prec = 100
C = ComplexBallField(prec)

def f (s,a=None) : # intégrande
    x = log(11+(1/2)*(1+s.above_abs())**2,2)
    k = ZZ(x.above_abs().ceil())
    p = 8+k+prec//2
    dzeta = (2**p)*(zeta(s+2**-p)-zeta(s))
    return dzeta.add_error(2**(8+k-p))/zeta(s)

R = [C(2-I),C(2+I),C(I),C(-I)]
result = 0
for k in range (4) :
    result += C.integral(f, R[k-1], R[k])
print ZZ(result/C(2*I*pi))

```

SageMath renvoie la valeur de -1, ce qui signifie que le calcul a abouti et que la boule trouvée pour la valeur de l'intégrale ne contenait que -1 comme entier. Comme la valeur de cette intégrale correspond, via le théorème des résidus, aux nombres de zéros moins le nombre de pôles de  $\zeta$  (comptés avec multiplicités), et que  $\zeta$  admet un unique pôle simple en 1, on en déduit que la fonction  $\zeta$  ne s'annule pas dans ce rectangle et donc pas dans la portion de la bande critique comprise entre -1 et 1.



Pour compter le nombre de zéros, on utilise le même code, mais avec un rectangle différent : la portion de la bande critique comprise entre 1 et 30. La fonction `integral` n'arrive pas à calculer tout d'un coup, mais cela passe en découpant entre 1 et 10, puis entre 10 et 20 et enfin entre 20 et 30. En remplaçant la deuxième ligne du code précédent par :

$$\begin{aligned} R &= [C(I), C(1+I), C(1+10*I), C(10*I)] , \\ R &= [C(10*I), C(1+10*I), C(1+20*I), C(20*I)] , \\ R &= [C(20*I), C(1+20*I), C(1+30*I), C(30*I)] , \end{aligned}$$

on obtient respectivement les valeurs de 0, 1 et 2, ce qui prouve que  $\zeta$  n'a que trois zéros dans la bande critique de parties imaginaires comprises entre 0 et 30.

# Bibliographie

- [Edw74] Harold M. EDWARDS, *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974
- [Gou08] Xavier GOURDON, *Les maths en tête : analyse*, Ellipses, 2008
- [Joh13] Fredrik JOHANSSON, *Rigorous high-precision computation of the Hurwitz zeta function and its derivatives*, Springer, 2014
- [Joh18] Fredrik JOHANSSON, *Numerical integration in arbitrary-precision ball arithmetic*, Springer, Lecture Notes in Computer Science, 2018
- [Kou16] Omran KOUBA, *Bernoulli polynomials and applications*, arXiv, 2016
- [Col11] Pierre COLMEZ, *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, Les éditions de l'école Polytechnique, 2011
- [Iwa14] Henryk IWANIEC, *Lecture on the Riemann Zeta Function*, American Mathematical Society, 2014
- [Can09] Bernard CANDELPERGHER, *Calcul intégral*, Cassini, 2009

J'ai aussi utilisé [TNP] mon mémoire de L3 sur le théorème des nombres premiers, co-réalisé avec Émile SÉGURET et encadré par Hugues AUVRAY, disponible à l'adresse <https://www.math.u-psud.fr/~auvray/memoireAGES.pdf>.