Une démonstration élémentaire du Théorème des Nombres Premiers

Réalisation : Alexandre Goyer et Émile Séguret
Chef de projet : Hugues Auvray

Présentation du projet

x	$\mathtt{Card}\{p\ \mathtt{premier},\ p \leq x\}$	`Quelle fonction de` x ?
10	4	
10^2	25	
10^3	168	
10^4	1 229	
10^5	9 592	
10^6	78 498	

Présentation du projet

x	$\mathtt{Card}\{p \text{ premier}, \ p \leq x\}$	$x/\log(x)$
10	4	$\simeq 4.3$
10^2	25	$\simeq 21.7$
10^3	168	$\simeq 144$
10^4	1 229	$\simeq 1086$
10^5	9 592	$\simeq 8\,685$
10^6	78 498	$\simeq 72\,382$

Les principales fonctions

- La fonction de décompte des nombres premiers :

$$\pi(x) \overset{\text{déf}}{=} \mathtt{Card}\{p \ \mathtt{premier},\ p \leq x\}.$$

Le Théorème des Nombres Premiers s'écrit alors :

$$\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}.$$

- La fonction ζ de Riemann, pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Les principales fonctions (suite et fin)

- La fonction de Mangoldt :

$$\Lambda(n) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \log(p) & \texttt{si } n = p^k \texttt{ avec } k \geq 1 \texttt{ et } p \texttt{ premier,} \\ 0 & \texttt{sinon.} \end{cases}$$

- La série de Dirichlet associée, pour $\Re(s) > 1$:

$$Z(s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \texttt{et la fonction } F \overset{\text{déf}}{=} Z - \zeta.$$

- La fonction sommatoire associée :

$$\psi(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Schéma de la preuve

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi(x) \sim \dfrac{x}{\log(x)} & \\
\psi(x) \sim x \arrow[ur] & & \pi(x) \sim \dfrac{\psi(x)}{\log(x)} \arrow[ul] \\
\texttt{Majoration de } F \arrow[u] & \texttt{Formule de Perron} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

Prolongement continu de ζ sur $\overline{D}\backslash\{1\}$

Pour tout s dans $D \overset{\text{déf}}{=} \{\Re > 1\}$, on a la formule du reste :

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2}.$$

Et donc, il vient :

$$\zeta(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1}$$

où $\eta \overset{\text{déf}}{:} s \mapsto \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx$ est continue sur $\overline{D}$.

Le produit d'Euler

Pour tout s dans D, on a la célèbre formule :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

On en déduit que ζ ne s'annule pas sur D.

Non-annulation de ζ sur $\overline{D}\backslash\{1\}$

Pour tout t réel et $\sigma > 1$, on a :

$$|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

On en déduit que ζ ne s'annule pas sur $\overline{D}\backslash\{1\}$, et on montre aussi que, pour tout s dans $\overline{D}\backslash\{1\}$:

$$Z(s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Majorations

Il existe quatre constantes T, M_1, M_2, M_3 telles que, pour tout $1 \leq \sigma \leq 2$ et $|t| \geq T$, on a :

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq M_1 \log |t|,$$

$$|\zeta'(\sigma + it)| \leq M_2 \log^2 |t|,$$

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq M_3 \log^7 |t|.$$

Majoration de la fonction F

La fonction F définie pour tout s dans D par :

$$F(s) = Z(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$$

est prolongeable par continuité sur tout $\overline{D}$.

Il existe $M > 0$ tel que pour tout t réel et $1 \leq \sigma \leq 2$:

$$|F(\sigma + it)| \leq M \log^9(2 + |t|).$$

La Formule de Perron

Soit la série de Dirichlet $\quad G = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}.$

Si pour tout $\epsilon > 0$, $(a_n n^{-\epsilon})_n$ est bornée, alors, pour tout $\sigma > 1$ et $x > 1$, on a :

$$\int_0^x \varphi(y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma+it+1} G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} dt$$

$$\text{où } \varphi(y) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{1 \leq n \leq y} a_n .$$

Identité clé

Reprenons la fonction

$$F(s) = Z(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$$

et sa fonction sommatoire $\displaystyle\sum_{1 \le n \le y} \Lambda(n) - 1 = \psi(y) - \lfloor y \rfloor.$

On a l'identité, pour tout $x > 1$:

$$\int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor)\, dy = \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(1+it)x^{it}}{(1+it)(2+it)} dt.$$

Comportement asymptotique de la fonction ψ

En introduisant la fonction, pour $x > 1$:

$$f \overset{\text{déf}}{:} t \mapsto \frac{F(1+it)x^{it}}{(1+it)(2+it)} \quad \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}),$$

l'Identité clé se réécrit :

$$\int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor)\, dy = \frac{x^2}{2\pi}\, \widehat{f}\,(-\log(x))\,,$$

et du lemme de Riemman-Lebesgue, on déduit :

$$\psi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x.$$

Lien entre les fonctions π et ψ.

La fonction sommatoire ψ vérifie, pour $x > 1$:

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x,\, p \, \mathtt{premier}} \left\lfloor \frac{\mathtt{log}(x)}{\mathtt{log}(p)} \right\rfloor \mathtt{log}(p),$$

et donc on a l'encadrement :

$$\psi(x) \leq \pi(x)\mathtt{log}(x) \leq 2\psi(x).$$

Le Théorème Des Nombres Premiers

Les comportements asymptotiques des fonctions π et ψ sont reliés par la formule :

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right),$$

dont découle le TNP.

$$\boxed{\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}}$$